

312 – Relativistischer Massenzuwachs von Beta-Teilchen

Versuchsprotokoll zum F-Praktikum an der Ruhr-Universität Bochum

Paul Katolla <p_katolla@yahoo.de>

21.08.2009

Tobias Krähling <Tobias.Kraehling@SemiByte.de>

Version 1.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
2 Grundlagen	2
2.1 Spezielle Relativitätstheorie	2
2.2 Elektronen im Magnetfeld	3
2.3 β -Zerfall	4
3 Versuchsbeschreibung und -aufbau	5
4 Versuchsdurchführung und -auswertung	6
4.1 Kalibrierung	7
4.2 Energie-Impuls-Messung	9
5 Fazit	11
A Anhang	12
A.1 Lösung zur Übungsaufgabe der Radioaktiven Zerfallskette	12
Literatur	13

1 Einführung

Ziel dieses Versuches ist die Untersuchung des Massenzuwachses von schnellen β^- -Teilchen, um die Aussagen der speziellen Relativitätstheorie zu bestätigen. Dazu soll ein Vergleich der klassischen und relativistischen Vorhersagen für die Energie-Impuls-Beziehung mit den in diesem Versuch gewonnenen Meßergebnissen durchgeführt werden. Hierzu werden relativistische Elektronen aus einer β^- -Quelle in ein nahezu homogenes Magnetfeld eingeschossen ($\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$) und bei ihrem Austritt detektiert. Impuls und Energie der Elektronen sind unter Berücksichtigung der Verluste zu bestimmen und mit den theoretischen Werten für den klassischen und relativistischen Fall zu vergleichen – dies soll über die gemeinsame Darstellung in einem Energie-Impuls-Diagramm erfolgen. Vor der eigentlichen Messung ist die Energieskala des Vielkanalanalysators zu kalibrieren.

2 Grundlagen

2.1 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein begründete 1905 die spezielle Relativitätstheorie und forderte die Äquivalenz von Energie und Masse

$$E = mc^2 \quad (2.1)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c als Proportionalitätsfaktor. Bei bewegten Körpern muß jedoch für die Erhaltung der Energie-Massen-Äquivalenz statt der Ruhemasse m_0 des Körpers dessen relativistische Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2.2)$$

mit der Geschwindigkeit des Körpers v verwendet werden – das heißt, die Masse ist nicht mehr konstant, sondern eine Funktion der Geschwindigkeit (Einstein, 1905).

Einsetzen von Gleichung (2.2) in Gleichung (2.1) liefert für die Energie eines relativistischen Teilchens die Beziehung

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.3)$$

Diese (Gesamt-)Energie setzt sich aus der Ruhe- und der kinetischen Energie additiv zusammen:

$$E = E_{kin} + E_0 = E_{kin} + m_0 c^2 \quad (2.4)$$

mit der Ruhemasse m_0 des Teilchens. In der Ruheenergie E_0 sind auch die potentielle als auch ggf. die Anregungsenergie des Teilchens enthalten. Aus den vorherigen Gleichungen erhält

man auch:

$$m^2(1 - \beta^2) = m_0^2 \Rightarrow \underbrace{m^2 c^4}_{=E^2} - \underbrace{m^2 v^2 c^2}_{=p^2 c^2} = m_0^2 c^4 \quad (2.5a)$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 + E_{kin} \quad (2.5b)$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \quad (2.5c)$$

$$\Rightarrow cp = \sqrt{E_{kin} (E_{kin} + 2m_0 c^2)} \quad (2.5d)$$

Für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) lässt sich die kinetische Energie

$$E_{kin} = E - m_0 c^2 \approx \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (2.6)$$

mittels Taylor-Entwicklung wieder in die gewohnte Form durch den klassischen Impuls $p = m_0 v$ ausdrücken. Aus Gleichung (2.5c) und (2.6) lässt sich auch das generelle Energie-Impuls-Verhalten erkennen. Während im klassischen Fall die kinetische Energie quadratisch mit dem Impuls steigt, hängt im relativistischen Fall für hohe Impulse ($p^2 c^2 \gg m_0^2 c^4$) die Energie linear vom Impuls ab – siehe hierzu auch Abbildung 1 (Demtröder, 2005).

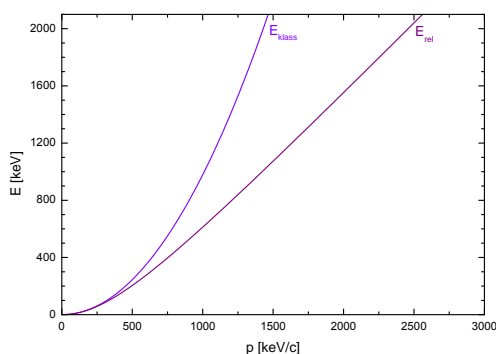


Abbildung 1: theoretischer Energie-Impuls-Verlauf

Beispiel 2.1 [Relativer Massenzuwachs von relativistischen Elektronen]:

Bewegen sich Elektronen (Ruheenergie $E_0 = 0,511 \text{ MeV}$) mit einer kinetischen Energie von $E_{kin} = 2,25 \text{ MeV}$, so beträgt der relative Massenzuwachs mit Hilfe der Beziehung $E = mc^2$:

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 \stackrel{\boxed{c \equiv 1}}{\downarrow} = 4,4$$

2.2 Elektronen im Magnetfeld

Tritt ein geladenes Teilchen in ein elektromagnetisches Feld ein, so erfährt dieses eine der Geschwindigkeit proportionale Kraft – diese Kraft wird Lorentz-Kraft genannt und lässt sich bestimmen über

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.7)$$

mit der Ladung q und Geschwindigkeit \mathbf{v} des Teilchens, dem elektrisch Feld \mathbf{E} und dem Magnetfeld \mathbf{B} . Liegt nur ein homogenes magnetisches Feld vor ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = \text{const.}$) und treten die Teilchen senkrecht zum Magnetfeld ein (sei $\mathbf{B} = B e_z$ und $\mathbf{v} = v e_y$), so wirkt die Lorentzkraft senkrecht zum Magnetfeld und der Bewegungsrichtung:

$$\mathbf{F}_L = q(v e_y \times B e_z) \Rightarrow \mathbf{F}_L \perp \mathbf{v}, \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

Die Trajektorie des Teilchens beschreibt eine Kreisbahn mit r , wobei Zentrifugalkraft F_Z und Lorentzkraft im Gleichgewicht sind:

$$|F_L| = |F_Z| \quad ; \quad F_Z = \frac{mv^2}{r} \quad (2.9)$$

In der oben genannten Anordnung sind die Teilchen in der x - y -Ebene eingeschlossen (ebenes Problem) und man erhält für Elektronen ($q = -e$):

$$mv = |q|Br \quad \xRightarrow{q = -e} \quad p = mv = eBr, \quad (2.10)$$

die sowohl im klassischen Fall wie auch in der relativistischen Betrachtung gültig ist. Bei bekannten Magnetfeld läßt sich somit über die Bestimmung des Radius der Impuls bzw. die Geschwindigkeit bestimmen.

2.3 β -Zerfall

Kernzerfälle bieten eine Möglichkeit, schnelle (relativistische) Teilchen experimentell zugänglich zu machen. Relativistische Elektronen erhält man dabei über β^- -Zerfälle, wo in einem Kern ein Neutron in ein Proton-Elektron-Antineutrino-Triplett zerfällt (Dreiteilchenzerfall):

$$Z \rightarrow (Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (2.11)$$

Freie Neutronen zerfallen nach diesem Prozeß mit einer Halbwertszeit von ca. 12 min – die Ruheenergie von Proton und Elektron ist zusammen kleiner als die Ruheenergie des Neutrons. Beim β^+ -Zerfall wird ein Proton in ein Neutron unter Emittierung eines Positron-Neutrino-Paars umgewandelt:

$$Z \rightarrow (Z - 1) + e^+ + \nu_e, \quad (2.12)$$

wobei hier die Differenz der Bindungsenergie von (Z) - und $(Z - 1)$ -Kern die Masse des Positrons e^+ und der Massendifferenz zwischen Proton und Neutron betragen muß. Die kinetische Energie der emittierten Teilchen bei beiden Zerfallsarten bilden ein Kontinuum bis zu einer maximalen Energie E_{max} , da die zur Verfügung stehende Energien auf alle drei Teilchen des Ausgangskanals aufgeteilt werden kann.

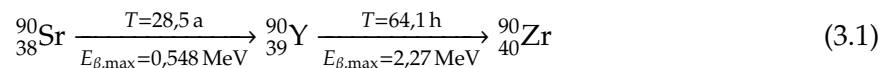
Zusätzlich wird der β^+ -Zerfall durch den Elektroneneinfangprozeß (EC = electron capture) überlagert, wo der Kern ein Elektron aus der Hülle einfängt und das Elektron mit einem Proton zu einem Neutron umgewandelt wird:

$$Z + e^- \rightarrow (Z - 1) + \nu_e. \quad (2.13)$$

Durch die Einführung des Neutrinos sind beim $\beta^{+,-}$ -Zerfall neben den Erhaltungssätzen für Baryonenzahl und Ladung auch diejenigen für Leptonenzahl, Spinquantenzahl, Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten.

3 Versuchsbeschreibung und -aufbau

Der verwendete Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung 2 dargestellt. Als β^- -Quelle wird hier Strontium (^{90}Sr) verwendet, welches eine zweigliedrige Zerfallskette



besitzt und relativistische Elektronen bis zu einer maximalen kinetischen Energie von 2,27 MeV emittiert. Die Elektronen treten mit geringer Divergenz aus der Quelle aus und werden in das nahezu homogene Magnetfeld zwischen den beiden Magnetfeldplatten des Permanentmagneten eingeschossen [$B = (0,105 \pm 0,01)\text{ T}$].

Durch Verschieben der Detektoreinheit entlang des Spaltes zwischen den beiden Platten des Permanentmagneten werden β -Teilchen mit unterschiedlichen Energien erfaßt. Dabei treffen die im Magnetfeld abgelenkten relativistischen Elektronen auf den Szintillator, welcher aus einem mit Thallium aktivierten Natriumjodidkristall besteht. In Einfallrichtung ist die Eintrittsöffnung schmal, wodurch immer nur ein relativ kleiner Impulsintervall selektiert wird. Diese Öffnung, auch Fenster genannt, ist mit einer Kunststoffolie verkleidet und den Szintillatorkristall vor Feuchtigkeit und Umgebungslicht schützt.

Dringen ionisierende Teilchen (z. B. β -Teilchen) in den Kristall ein, so erzeugen sie längs ihrer Bahn freie Elektronen und Löcher sowie Excitonen. Die so deponierte Energie kann unter Emission von Lichtimpulsen abgegeben werden. Dabei ist die Intensität der emittierten

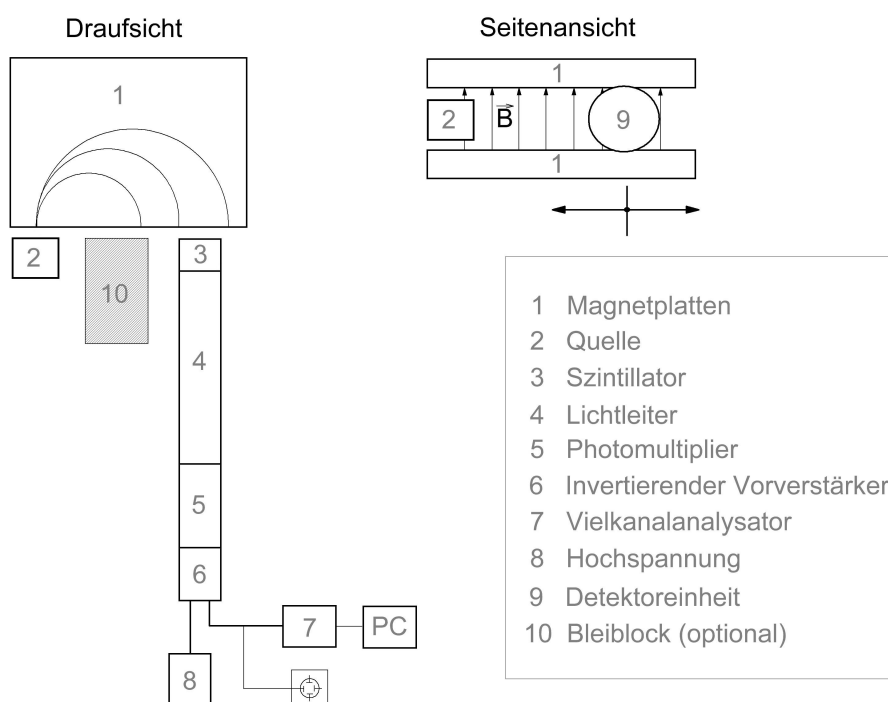


Abbildung 2: Versuchsaufbau

Lichtimpulse proportional zur Energie der eintreffenden β -Teilchen. In Ausfallrichtung ist der Szintillator optisch lichtdurchlässig, wodurch die Lichtimpulse den Kristall verlassen können und über einen Lichtwellenleiter zum Photomultiplier gelangen. Dieser räumliche Abstand ist notwendig um Störungen des Photomultipliers durch das Streufeld des Magneten zu minimieren.

Treffen Lichtimpulse auf die Photokathode des Photomultipliers, so werden dort Elektronen ausgeschlagen – dabei ist deren Anzahl proportional zur Intensität der Lichtimpulse (Photoeffekt). Die emittierten Elektronen der Photokathode werden über ein Potential beschleunigt und treffen auf die erste Dynode und schlagen dort ihrerseits neue Elektronen heraus. Durch geschickt angelegte elektrische Felder sowie eine gezielte Anordnung der Dynoden bzw. Hilfselektroden wird gewährleistet, daß die Elektronen möglichst vollständig von Dynode zur Dynode geführt werden. Der Verstärkungsfaktor beträgt in etwa 2 bis 3 Elektronen pro Dynode.

An der Anode des Photomultipliers fließen die Elektronen über einen Widerstand zur Masse ab. Der Spannungsabfall an diesem Widerstand ist das Ausgangssignal, welches proportional zur Intensität der einfallenden Szintillatorimpulse und somit auch proportional zur Energie der einfallenden β -Teilchen ist. Mit Hilfe eines invertierenden Verstärkers wird das Ausgangssignal integriert, außerdem erlaubt der Verstärker das zu messende Energieintervall einzustellen (dies wird bei der Kalibrierung vorgenommen). Diese Spannungsimpulse von dem invertierenden Verstärker werden mit dem Vielkanalanalysator entsprechend ihrer Amplitude – also auch entsprechend ihrer Energie – sortiert und mit einer PC-Software graphisch dargestellt. Zusätzlich wird das Ausgangssignal des Photomultipliers auf einem Oszilloskop dargestellt.

Um die Detektoreinheit vor der zusätzlichen Gamma-Strahlung aus der Strahlungsquelle abzuschirmen, wird, wenn vom Aufbau möglich, zwischen Strahlungsquelle und Detektoreinheit ein Bleiblock aufgestellt. Zusätzlich mußte vor der Kalibrierung der Magnet so ausgerichtet werden, daß das Magnetfeld senkrecht zur Einschußrichtung der β -Teilchen steht – hierzu war der Magnet in einem Zylinder befestigt, der um die Längsachse gedreht werden konnte.

4 Versuchsdurchführung und -auswertung

Zunächst wurde die Energieskala des Vielkanalanalysators mit drei γ -Quellen kalibriert (Details siehe Abschnitt 4.1). Mit dem Meßwertaufnahmeprogramm konnte das Kanalspektrum (Intensität in Abhängigkeit des Kanals vom Vielkanalanalysator) aufgenommen werden – die Dauer einer Messung wurde dabei so gewählt, daß der Peak deutlich zu erkennen war. Anschließend wurde visuell der Peakschwerpunkt und der Fehler abgeschätzt.

Nach der Aufnahme der Kalibrierungsdaten wurden diese überprüft, ob die aufgenommenen Werte den erwarteten linearen Verlauf zeigten. Anschließend wurde die β^- -Quelle eingebaut und bei unterschiedlichen Detektorpositionen (Verschiebung um jeweils 1 cm) der Kanal des Peakmaximums sowie der Fehler bestimmt. Die Meßwertaufnahme wurde dabei solange durchgeführt, bis ein deutlicher Peak zu erkennen war. Das Subtraktionsverfahren, wie es in der Versuchsanleitung beschrieben ist, war dabei nur für die letzten beiden Werte bei kleinen Abständen (Messung $i = 10,11$ in Tabelle 3) notwendig, da hier der Peak durch den

Hintergrund nicht mehr zu erkennen war. Beim Subtraktionsverfahren wurde zunächst das Spektrum mit Hintergrund aufgenommen, dann die β^- -Strahlung durch einen Metallblock, der zwischen die Magnetplatten gestellt wurde, unterbrochen und bei etwa gleicher Meßzeit die Meßwertaufnahme im Subtraktionsmodus durchgeführt – man erhält dann das Spektrum der β^- -Strahlung. Der in Abbildung 2 aufgeführte Bleiblock zwischen Strahlungsquelle und Detektoreinheit zur Abschirmung der γ -Strahlung konnte bei den letzten drei Messungen ($i = 9,10,11$ in Tabelle 3) nicht verwendet werden, da dieser bei den kleinen Radien nicht mehr zwischen Quelle und Detektoreinheit paßte.

4.1 Kalibrierung

Vor der eigentlichen Messung der Energie mußte zunächst der Vielkanalanalysator kalibriert werden, um eine Zuordnung von Kanal zur Energie herstellen zu können. Der verwendete Szintillator ist neben β^- -Strahlung auch sensitiv auf γ -Quanten, so daß für die Kalibrierung γ -Quellen verwendet werden können. Zur Verfügung standen die drei γ -Quellen ^{137}Cs , ^{22}Na und ^{60}Co , deren Termschemata in Abbildung 3 wiedergegeben sind. Co besitzt zwei γ -Übergänge, die beiden anderen Präparate jeweils einen, die 511 keV- γ -Linie beim Na kommt aus der Elektron-Positron-Anihilation.

Für die Kalibrierung wurden nacheinander die Kalibrierpräparate auf den Szintillator gelegt und so positioniert, daß ein deutliches Signal zu erkennen war. Begonnen wurde mit dem Cäsium-Präparat, dessen γ -Quanten eine Energie von 661 keV besitzen, so daß ein ausgeprägter Peak bei dieser Energie zu erwarten war (vgl. auch Abb. 13 in RUB (2004)). In Abschnitt 3 wurde bereits aufgeführt, daß bei diesem Versuch maximal eine Energie von 2,27 MeV zu erwarten ist – damit war es über Änderungen der Parameter des Meßverstärkers möglich, den Peak so zu verschieben und zu stauchen, daß der verfügbare Meßbereich von 1024 Kanälen möglichst vollständig ausgeschöpft wird. Anschließend wurden die anderen beiden Präparate gemessen, ohne Änderungen an den Meßverstärkerparametern vorzunehmen.

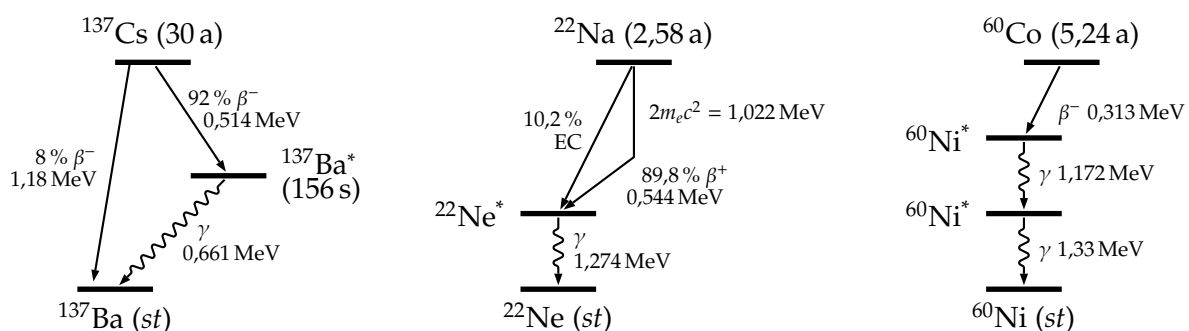


Abbildung 3: Termschemata der Kalibrierproben

In Tabelle 1 sind die bestimmten Zuordnungen wiedergegeben und in Abbildung 4 graphisch aufgetragen. Man erkennt den linearen Zusammenhang des Vielkanalanalysator zwischen Kanal und Energie, so daß mittels eines linearen Modells eine Kalibriergerade berechnet werden kann. Die Werte hierfür sind in Tabelle 2 aufgeführt. Wie erwartet wurde, verläuft die Gerade

Präparat	E [keV]	Kanal
^{137}Cs	661	331 ± 2
^{60}Co	1172	568 ± 5
	1333	670 ± 3
^{22}Na	511	261 ± 2
	1274	636 ± 2

Tabelle 1: Kalibrierungsmessung zur Zuordnung der Energie zum Kanal

Fit-Modell: $E = E_0 + \kappa K$	
E_0 :	$-12 \text{ keV} \pm 29 \text{ keV}$
κ :	$2,03 \frac{\text{keV}}{\text{Kanäle}} \pm 0,05 \frac{\text{keV}}{\text{Kanäle}}$
Reduziertes χ^2 :	$4,2 \cdot 10^{-4}$
korrigiertes R^2 :	99,7%

Tabelle 2: Lineares Modell zur Energie-zu-Kanal-Kalibrierung

innerhalb des Toleranzbereiches durch den Koordinatenursprung und Korrelationskoeffizient R^2 sowie χ^2 bestätigen die Annahme, daß hier ein lineares Modell vorliegt – damit kann im Folgenden dieses lineare Modell mit den bestimmten Parametern für die Transformation der Kanalnummer in die Energie verwendet werden.

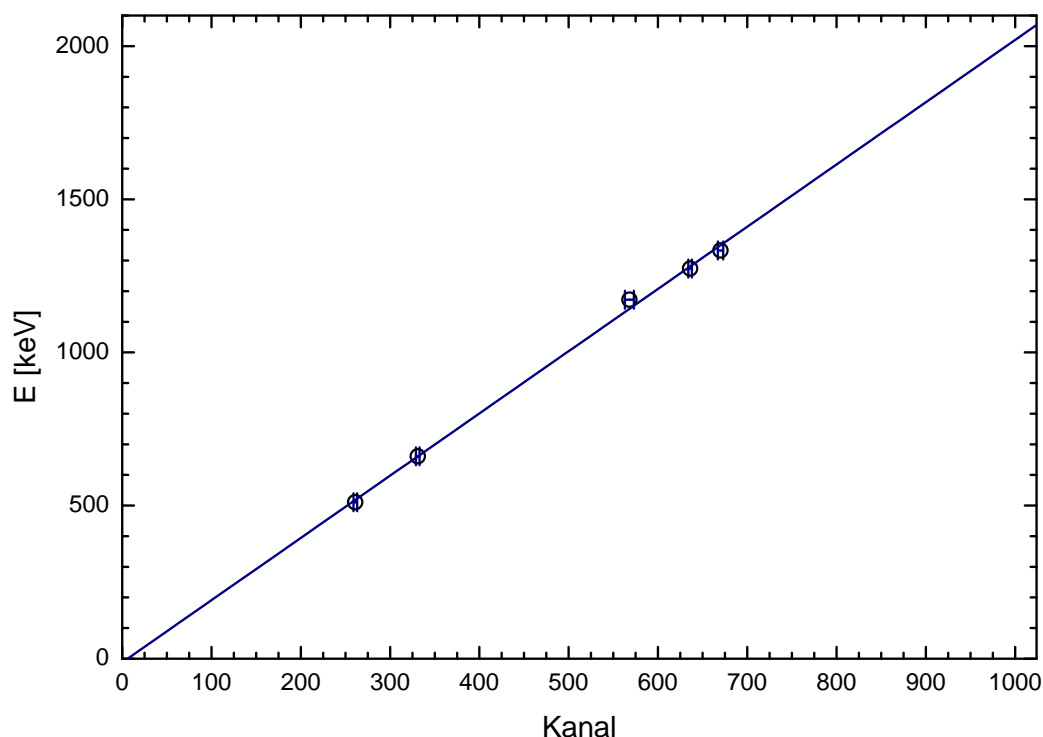


Abbildung 4: Energie-zu-Kanal-Kalibrierung

Den Fehler der Energie kann, bei Bestimmung des Kanals am Peakmaximum, mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung abgeschätzt werden über

$$E = E_0 + \kappa K \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \sqrt{(\Delta\kappa \cdot K)^2 + (\kappa \cdot \Delta K)^2 + (\Delta E_0)^2} \quad (4.1)$$

wobei K die Kanalnummer, ΔK die abgeschätzte Unsicherheit der Kanalnummer bezeichnet – $\Delta\kappa$ und ΔE_0 sind die Fehlerbereiche aus dem linearen Modell (vgl. Tabelle 2).

4.2 Energie-Impuls-Messung

Mit Gleichung (4.1) und den Werten aus Tabelle 2 lassen sich der bestimmten Kanalnummer die Energie der β^- -Teilchen zuordnen. Zusätzlich muß noch der Energieverlust der β^- -Teilchen beim Durchgang durch Luft bzw. beim Eintritt in den Szintilator (Schutzschicht aus einem Kunststoff) berücksichtigt werden. Der Weg durch die Luft ist der Halbkreis, den die Elektronen zwischen dem Magneten beschreiben (siehe Abbildung 2), wobei nur ein Viertelkreis berücksichtigt werden muß, da die mittlere kinetische Energie und Impuls der Teilchen betrachtet werden.

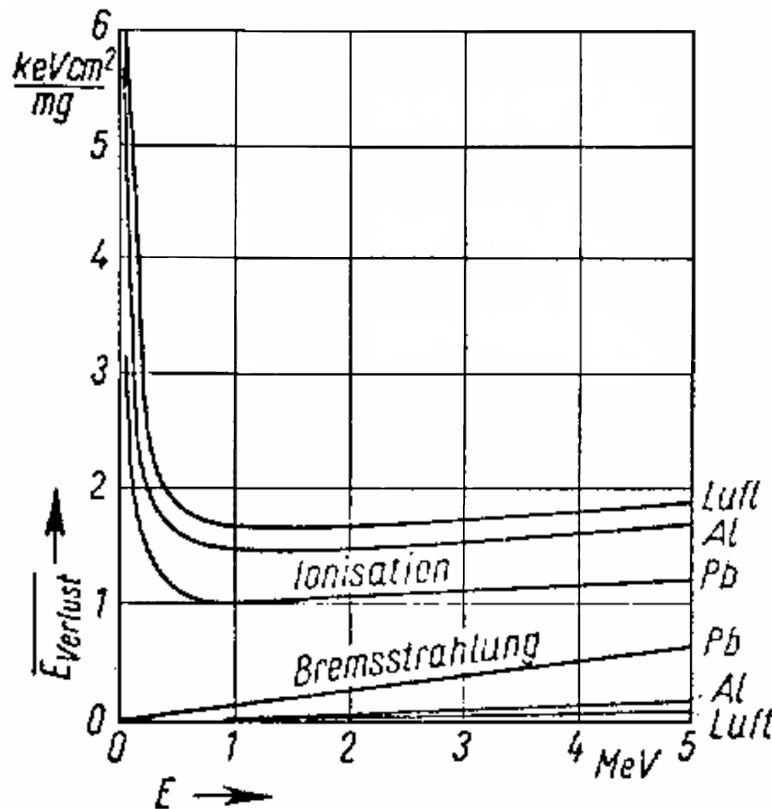


Abbildung 5: Mittlerer Elektronenenergieverlust (aus RUB (2004), nach RIWA 58)

Die Dichte der Luft war in der Versuchsanleitung (RUB, 2004) angegeben mit $\rho_L = (1,290 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (wobei der Fehlerbereich aus der Angabegenauigkeit ermittelt wurde). Das mittlere Bremsvermögen von β^- -Teilchen in Luft wurde aus Abbildung 5 für den Bereich zwischen 0,5 MeV und 2 MeV abgeschätzt zu $B_L = (1,59 \pm 0,02) \frac{\text{keVcm}^2}{\text{mg}}$. Hierbei entfallen etwa $1,57 \frac{\text{keVcm}^2}{\text{mg}}$ auf Ionisations- und $0,02 \frac{\text{keVcm}^2}{\text{mg}}$ auf Bremsstrahlungsverluste. Für die Abschätzung des mittleren Energieverlustes in Luft E_L gilt dann die Beziehung

$$E_L = B_L \rho_L s_L \quad \text{und} \quad s_L = \frac{\pi}{2} r = \frac{\pi}{4} d \quad \Rightarrow \quad E_L = \frac{\pi}{4} B_L \rho_L d \quad (4.2)$$

und für den abgeschätzten Fehler

$$\Delta E_L = \pm \left(\left| \frac{\pi}{4} \rho_L d \Delta B_L \right| + \left| \frac{\pi}{4} B_L d \Delta \rho_L \right| + \left| \frac{\pi}{4} B_L \rho_L \Delta d \right| \right), \quad (4.3)$$

wobei hier der Maximalfehler nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung verwendet wurde, da hier nur geschätzte Meßwerte und Fehler eingehen und nicht davon ausgegangen werden kann, daß sich die Fehler der einzelnen Meßgrößen teilweise kompensieren (Kuchling, 1994).

Anders wie in der Versuchsanleitung angegeben, ist der Szintillator durch eine Kunststoffschicht vor Feuchtigkeit geschützt. Der gesamte Energieverlust beim Durchgang der β^- -Teilchen durch die Kunststoffschicht wurde vom Betreuer mit $E_K = 10 \text{ keV} \pm 0,5 \text{ keV}$ angegeben (wobei der Fehlerbereich aus der Angabegenauigkeit abgeschätzt wurde).

Die korrigierte Energie der β -Teilchen ergibt sich dann über die Summe aus den drei Anteilen mittels

$$E = \tilde{E} + E_L + E_K \quad (4.4)$$

und der Fehler nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta E = \pm \sqrt{(\Delta \tilde{E})^2 + (\Delta E_L)^2 + (\Delta E_K)^2} \quad (4.5)$$

i	d [cm]	Kanal	\tilde{E} [keV]	E_L [keV]	E_K [keV]	E [keV]	p [keV/c]
1	11,0 ± 0,1	612 ± 2	1230 ± 30	17,7 ± 0,5	10,0 ± 0,5	1260 ± 30	1810 ± 180
2	12,0 ± 0,1	672 ± 3	1350 ± 40	19,3 ± 0,5	10,0 ± 0,5	1380 ± 40	1980 ± 200
3	13,0 ± 0,1	730 ± 3	1470 ± 40	20,9 ± 0,5	10,0 ± 0,5	1500 ± 40	2140 ± 210
4	14,0 ± 0,1	779 ± 2	1570 ± 40	22,5 ± 0,5	10,0 ± 0,5	1600 ± 40	2310 ± 230
5	15,0 ± 0,1	839 ± 3	1690 ± 40	24,2 ± 0,6	10,0 ± 0,5	1720 ± 40	2470 ± 240
6	10,0 ± 0,1	547 ± 2	1100 ± 30	16,1 ± 0,4	10,0 ± 0,5	1130 ± 30	1650 ± 170
7	9,0 ± 0,1	488 ± 2	979 ± 27	14,5 ± 0,4	10,0 ± 0,5	1003 ± 27	1480 ± 150
8	8,0 ± 0,1	434 ± 4	869 ± 26	12,9 ± 0,4	10,0 ± 0,5	892 ± 26	1320 ± 140
9	7,0 ± 0,1	361 ± 2	721 ± 22	11,3 ± 0,4	10,0 ± 0,5	742 ± 22	1150 ± 120
10	6,0 ± 0,1	291 ± 3	579 ± 20	9,7 ± 0,3	10,0 ± 0,5	599 ± 20	990 ± 110
11	5,0 ± 0,1	228 ± 5	451 ± 19	8,1 ± 0,3	10,0 ± 0,5	469 ± 19	820 ± 90

i: lf. Nummer; d: Durchmesser des Halbkreises (Meßwert); Kanal: Kanalnummer des Peakmaximums (Meßwert); \tilde{E} : unkorrigierte Energie aus Kanalnummer; E_L : Energieverlust in Luft; E_K : Energieverlust in Kunststoffschicht; E: Korrigierte Energie der β -Teilchen; p: Impuls der β -Teilchen

Tabelle 3: Meßwerte und berechnete Werte zur Energie-Impuls-Beziehung

In Tabelle 3 sind die Meßwerte sowie die berechneten Werte zusammen aufgeführt, wobei der Impuls p über Gleichung (2.10) bestimmt wurde. Die Energie-Impuls-Abhängigkeit ist in Abbildung 6 zusammen mit den theoretischen Werten nach Gleichung (2.5c) und Gleichung (2.6) aufgetragen. Man erkennt deutlich die Korrelation zwischen der experimentell bestimmten und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung. Bei größeren Energien liegen die Energien sogar unterhalb der theoretischen Kurve für die relativistische Beziehung. Hier könnte die Möglichkeit bestehen, daß die Verluste bei hohen Energien durch Ionisation und Bremsstrahlung höher sind – hier wurde nur ein mittlerer Energieverlust berücksichtigt und für den Energieverlust des Szintillator-Kunststofffensters war kein Diagramm verfügbar, um

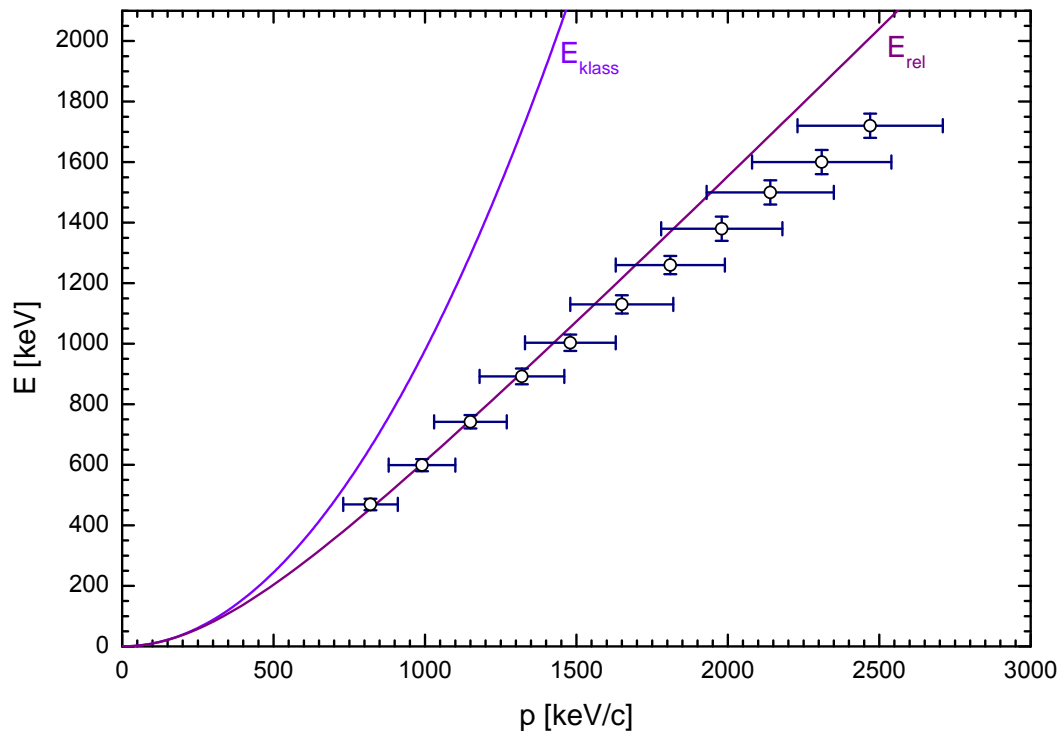


Abbildung 6: Vergleich der Energie-Impuls-Beziehung

diese Vermutung zu untersuchen. Weitere Fehlermöglichkeiten sind Inhomogenitäten des Magnetfeldes, so dass Elektronen mit großen Impulsen durch andere Teile des Feldes fliegen als solche mit kleinen Impulsen. Ebenfalls wurde der Wege von Quelle bis Eintritt Magnetfeld sowie Austritt Magnetfeld bis Szintillatorfenster nicht berücksichtigt – diese Entfernung war aber sehr gering ($\lesssim 0,5$ cm), da der Magnet sehr nahe herangeschoben werden konnte, und der hierdurch entstandene Fehler vernachlässigbar klein sein. Der sehr hohe Fehler bei der Impulsbestimmung ist hauptsächlich auf die hohe Unsicherheit beim Magnetfeld zurückzuführen – dieser beträgt schon $\sim 10\%$.

5 Fazit

Im Rahmen dieses Versuches konnte die relativistische Energie-Impuls-Beziehung für schnelle Elektronen bestätigt werden. Es zeigt sich, daß Aussagen der speziellen Relativitätstheorie auch bereits mit verhältnismäßig einfachen Mitteln gut experimentell zugänglich sind.

A Anhang

A.1 Lösung zur Übungsaufgabe der Radioaktiven Zerfallskette

Der Aktivitätsverlauf für Strontium lässt sich über die Beziehung

$$A(^{90}\text{Sr}, t) = A(^{90}\text{Sr}, 0) \exp\{-\lambda(^{90}\text{Sr})t\} \quad \text{mit} \quad \lambda(^{90}\text{Sr}) = \frac{\ln(2)}{T(^{90}\text{Sr})} \quad (\text{A.1})$$

bestimmen. Da Strontium mit einer Rate von $\frac{dN(^{90}\text{Sr})}{dt} = -\lambda(^{90}\text{Sr})N(^{90}\text{Sr})$ in Yttrium zerfällt, wird Yttrium mit einer Rate von $\lambda(^{90}\text{Sr})N(^{90}\text{Sr}, t)$ gebildet. Yttrium zerfällt jedoch mit einer Rate von $\lambda(^{90}\text{Y})N(^{90}\text{Y}, t)$. Der effektive Zuwachs von Yttrium-Kernen ist pro Zeiteinheit demnach

$$\frac{dN(^{90}\text{Y})}{dt} = \lambda(^{90}\text{Sr})N(^{90}\text{Sr}, t) - \lambda(^{90}\text{Y})N(^{90}\text{Y}, t) \quad (\text{A.2a})$$

oder

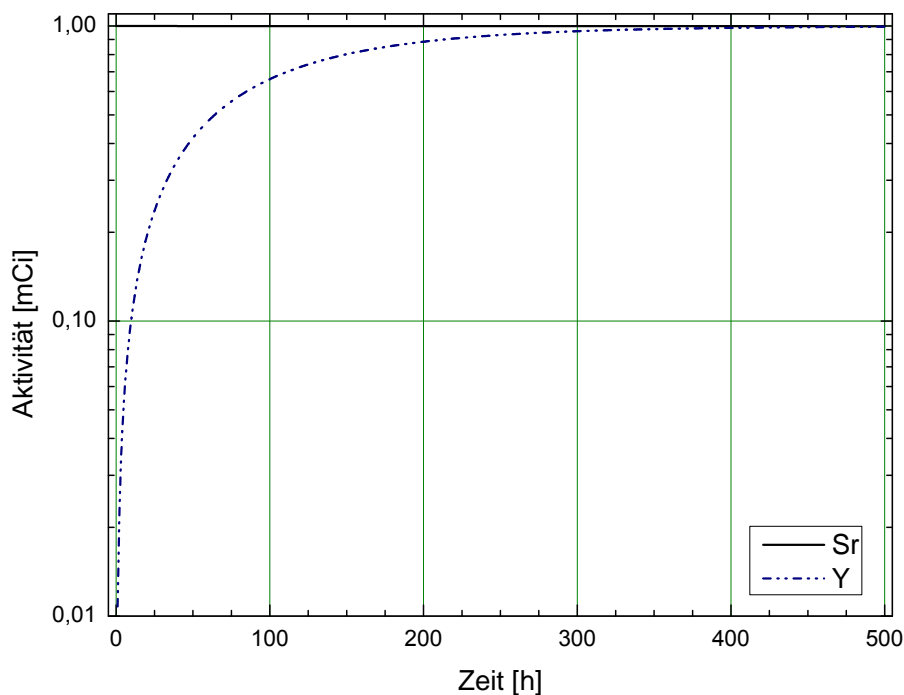
$$\frac{dN(^{90}\text{Y})}{dt} = \lambda(^{90}\text{Sr})N(^{90}\text{Sr}, 0) \exp\{-\lambda(^{90}\text{Sr})t\} - \lambda(^{90}\text{Y})N(^{90}\text{Y}, t). \quad (\text{A.2b})$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollte nur Strontium vorliegen, d. h. $N(^{90}\text{Y}, 0) = 0$, und man erhält als Lösung:

$$N(^{90}\text{Y}, t) = \frac{\lambda(^{90}\text{Sr})}{\lambda(^{90}\text{Y}) - \lambda(^{90}\text{Sr})} N(^{90}\text{Sr}, 0) \left(\exp\{-\lambda(^{90}\text{Sr})t\} - \exp\{-\lambda(^{90}\text{Y})t\} \right) \quad (\text{A.3})$$

Umgerechnet in Aktivität über $A = \lambda N$ ergibt sich:

$$A(^{90}\text{Y}, t) = \frac{\lambda(^{90}\text{Y})}{\lambda(^{90}\text{Y}) - \lambda(^{90}\text{Sr})} A(^{90}\text{Sr}, 0) \left(\exp\{-\lambda(^{90}\text{Sr})t\} - \exp\{-\lambda(^{90}\text{Y})t\} \right) \quad (\text{A.4})$$



Literatur

Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer Verlag Berlin, 4. Auflage, 2005. ISBN 3-540-26034-x.

Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905. DOI: 10.1002/andp.19053221004.

Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 14. Auflage, 1994. ISBN 3-343-00858-3.

312 – Relativistischer Massenzuwachs von Beta-Teilchen, Versuchsanleitung zum F-Praktikum. RUB, 2004. Version 20.02.2004.

Liste der Versionen

Version	Datum	Bearbeiter	Bemerkung
0.9	22.04.2009	Kat/Krä	Versuchsdurchführung
1.0	04.05.2009	Kat/Krä	Versuchsauswertung
1.1	21.08.2009	Krä	kleinere Korrekturen