Kurze Betrachtungen aus der Plasmaphysik

Bernoulli-Gleichung für nicht-kompressible Flüssigkeiten im stationären Zustand

Tobias Krähling 04.12.2011

Zusammenfassung

Aus der Kraftgleichung für Fluidelemente wird die Bernoulli-Gleichung für nicht-kompressible Flüssigkeiten im stationären Zustand entwickelt.

Die Kraftgleichung für ein Fluidelement ist im stoßfreien Fall gegeben durch

$$mn\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}\right] = qn\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \nabla p$$

mit der Masse m eines Fluidelements, der Teilchendichte n und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ der Fluidelemente, dem Druck p und den elektrischen $\boldsymbol{E}$ und magnetischem $\boldsymbol{B}$ Feldern, q bezeichnet die Ladung.

Im stationären Zustand bleibt die Geschwindigkeit konstant, d. h. es gilt $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = 0$. Da eine nicht-kompressible Flüssigkeit betrachtet werden soll, bedeutet dies, das die Flüssigkeit feldfrei ist, also $\boldsymbol{E} = 0$ und $\boldsymbol{B} = 0$. Damit folgt für die Kraftgleichung:

$$\begin{aligned} & mn\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}\right] = qn\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \nabla p \\ \Rightarrow\quad & mn\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\nabla p \end{aligned}$$

Betrachte die i-te Komponente:

$$\begin{aligned} & mn\left(u_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \Leftrightarrow\quad & mnu_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \Leftrightarrow\quad & mnu_i\,\partial u_i = -\,\partial p \end{aligned}$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} & \int mnu_i\,\partial u_i = -\int \partial p \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}mnu_i^2 = -p + C \end{aligned}$$

mit der Integrationskonstanten C. Anwenden auf alle Komponenten liefert

$$\frac{1}{2}mn\sum_{i=1}^{3}u_i^2 = -p + C$$

und somit die Bernoulli-Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{2}mnu^2 + p = C = \text{const.}}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der Vektoridentität:

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

Mit $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{u}$ folgt:

$$2(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = \nabla u^2$$

Einsetzen in $mn\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\nabla p$ liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mn\nabla u^2 = -\nabla p \quad & \Rightarrow\quad \nabla\left(\frac{1}{2}mnu^2 + p\right) = 0 \\ & \Rightarrow\quad \frac{1}{2}mnu^2 + p = \text{const.} \end{aligned}$$