Quantoren

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

28.11.2010
Version 1.1

Quantoren sind Operatoren in der Prädikatenlogik und werden dazu verwendet, mathematische Aussagen noch kürzer und prägnanter zu formulieren. Für die Formulierungen »für alle...« und »es existiert...« werden zwei neue Symbole eingeführt, die Quantoren.

Definition 1 [*Allquantor*]

Für $E(x)$ als Aussageform, M als Menge von zulässigen Objekten und der Bedingung $\left\{ x \in M \,\middle|\, E(x) \right\} = M$ ist die Schreibweise des *Allquantor* mit dem Symbol $\forall$:

$$\forall x \in M : E(x)$$

Der Allquantor steht also für eine Formulierung *»für alle...«*. ◀

Definition 2 [*Existenzquantor*]

Für $E(x)$ als Aussageform, M als Menge von zulässigen Objekten und der Bedingung $\left\{ x \in M \,\middle|\, E(x) \right\} \neq \emptyset$ ist die Schreibweise des *Existenzquantor* mit dem Symbol $\exists$:

$$\exists x \in M : E(x)$$

Der Existenzquantor steht also für eine Formulierung *»es existiert...«*. ◀

Mit dem Existenzquantor wird bezeichnet, dass es mindestens ein Objekt mit der fraglichen Eigenschaft gibt – jedoch können es auch mehrere sein. Will man angeben, dass es nur genau ein Objekt mit der fraglichen Eigenschaft gibt, so schreibt man $\exists!$.

Durch das voranstellen von Quantoren in einer Aussageform geht diese in eine Aussage über, dies nennt man *Quantifizierung*. Sie wird in der Prädikatenlogik verwendet.

Das Regelsystem zur Bildung von Beweisen kann nun mit Hilfe der Quantoren erweitert werden. Hierfür sei G eine Menge zulässiger Objekte für die Aussageform $E(x)$.

1. Regel vom Existenz-Nachweis:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Wenn} & \vdash a \in G \\ \text{und} & \vdash E(a) \end{array}\right\}, \text{dann } \vdash \exists x \in G : E(x)$$

2. Regel von der Generalisierung:

$$\begin{array}{rl} \text{Wenn} & \vdash x \in G \Rightarrow E(x) \\ \text{dann} & \vdash \forall x \in G : E(x) \end{array}$$

   (mit einem von x unabhängigen Beweis für die Aussage $x \in G \Rightarrow E(x)$).

3. Regel von der Spezialisierung:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Wenn} & \vdash a \in G \\ \text{und} & \vdash \forall x \in G : E(x) \end{array}\right\}, \text{dann } \vdash E(a).$$

Man zeigt, um die Existenz eines Objektes $x \in G$ mit der Eigenschaft $E(x)$ zu beweisen, dass die Aussagen $a \in G$ und $E(a)$ richtig sind. Somit steht also nicht die Suche nach einem a im Mittelpunkt der Bemühungen, sondern die Verifizierung, dass die Eigenschaft $E(a)$ erfüllt ist.