Aussagenlogik

Tobias Krähling
eMail: <Tobias.Kraehling@semibyte.de>
Homepage: <www.semibyte.de>

13.10.2012
Version 1.2

Zusammenfassung

Die Aussagenlogik ist sicherlich ein grundlegendes mathematisches Gerüst für weitere mathematische Überlegungen und damit wohl eine der wichtigen Voraussetzungen, um ein mathematisches Verständnis aufzubauen und mathematische Zusammenhänge kurz und prägnant zu definieren und beschreiben. In dieser Zusammenstellung werden die einzelnen logischen Verknüpfungstypen vorgestellt, Begriffe für die Aussagenlogik definiert und Regeln für die Arbeit mit der Aussagenlogik herausgearbeitet.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Definition 1 [*Aussage*]

Eine *Aussage* ist ein Satz, bei dem entschieden werden kann, ob dieser *wahr* oder *falsch* ist. Als Ergebniswert, der sogenannte *Wahrheitswert*, ist nur der Wert *wahr* oder *falsch* möglich. ◀

Für den *Wahrheitswert* werden häufig die Abkürzungen w für wahr sowie f für falsch verwendet, im folgenden werden wir diese Abkürzungen für die *Wahrheitswerte* verwenden. Einige andere gebräuchliche Abkürzungen für die *Wahrheitswerte* wahr und falsch sind 1/0 oder an/aus.

Die Aussage *1 ist gerade* ist eine Aussage, die falsch ist und somit den *Wahrheitswert* f besitzt, die Aussage *2 ist gerade* entsprechend eine wahre Aussage. Sätze wie »*Wie spät ist es?*« oder »*Ist das Wetter schön?*« sind keine Aussagen, sondern Fragen und ihnen kann dementsprechend kein Wahrheitswert zugeordnet werden.

Den Wahrheitswert der Aussage »*Das Wetter ist schön*« kann man einfach feststellen, indem man aus dem Fenster schaut (dabei muss man sich jedoch auf ein Bezugssystem einigen, da das Wetter an einem Ort schön sein kann, an einem anderen jedoch nicht). Diese Aussagen haben jedoch einen Nachteil, dass sie nicht allgemein verwendet werden können, da die Aussage auf ein bestimmtes Objekt spezifiziert ist.

Will man eine Aussage für mehrere Objekte definieren, wobei dann für jedes Objekt entschieden werden muss, ob die Aussage wahr oder falsch ist, verwendet man Variablen und man nennt eine Aussage mit Variablen *Aussageform*.

Definition 2 [*Aussageform*]

Eine Aussage mit Variablen nennt man *Aussageform*. ◀

Um auf das Beispiel oben zurückzukommen mit den geraden Zahlen, so kann man nun sagen: *x ist gerade* und hat damit eine *Aussageform*, da der Wahrheitswert der Aussage nur entschieden werden kann, wenn man für x eine Zahl einsetzt, z. B. eine Zahl aus der Menge der natürlichen Zahlen.

In den *Aussageformen* werden diese Variablen häufig mit p und q bezeichnet, so dass sie im weiteren ebenfalls verwendet werden.

Einfache Aussagen können durch *logische Verknüpfungen* zusammengefasst werden, wodurch neue Aussagen entstehen. Als Hilfsmittel zur Bestimmung der Wahrheitswerte der zusammengesetzten Aussage werden *Wahrheitstafeln* eingesetzt, bei denen die Wahrheitswerte der Teilaussagen und der zusammengesetzten Aussage tabellarisch aufgeführt werden.

Im folgenden werden die einzelnen logischen Verknüpfungen mit ihren Wahrheitstafeln vorgestellt.

2 logische Verknüpfungen

2.1 Konjunktion (Und-Verknüpfung)

Schon im Sprachgebrauch wird die Und-Verknüpfung so verwendet, wie wir es nun mathematisch definieren. Die zusammengesetzte Aussage »x ist gerade und durch 3 teilbar.« werden wir nur als richtig ansehen, wenn die Zahl x sowohl gerade ist wie auch durch 3 teilbar, z.B. für $x = 6$ würde diese Aussage zutreffen. Würde eine der beiden Teilaussagen nicht stimmen (z. B. weil die Zahl nicht durch 3 teilbar ist), so ist die Gesamtaussage falsch, z. B. ist für x=4 zwar die erste Teilaussage richtig (x ist gerade), jedoch nicht durch 3 teilbar.

Hieraus ergibt sich ebenfalls für die Mathematik die folgende

Definition 3 [*Konjunktion*]

Eine *Konjunktion* ist die Aussage »p und q« ($p \wedge q$), die genau dann *wahr* ist, wenn p und q gleichzeitig *wahr* sind. ◀

Als Zeichen der Konjunktion wird das Symbol $\wedge$ verwendet. Die Wahrheitstafel der Konjunktion ist in Tabelle 1 wiedergegeben.

p	q	p ∧ q
f	f	f
w	f	f
f	w	f
w	w	w

Tabelle 1: Wahrheitstafel Konjunktion

Beispiel 1:

Nehmen wir wieder die Verknüpfung von oben, »*x ist gerade und durch 3 teilbar*«. Daraus ergibt sich für verschiedene Werte von x die folgende Wahrheitstafel:

Zahl x	Teilaussagen		Gesamtaussage
	x ist gerade	*x* ist durch 3 teilbar	*x* ist gerade und durch 3 teilbar
2	w	f	f
3	f	w	f
4	w	f	f
5	f	f	f
6	w	w	w
9	f	w	f
12	w	w	w

2.2 Disjunktion (Oder-Verknüpfung)

Bei der *Oder-Verknüpfung* oder *Disjunktion* ist der Sprachgebrauch nicht ganz eindeutig. Manche assoziieren ein »oder« im Sprachgebrauch damit, dass nur einer der beiden Werte richtig sein darf um eine wahre Aussage zu erhalten. Andere sehen es so, dass mindestens einer der Werte wahr sein muss, um ein wahres Ergebnis zu erhalten. Das logische ODER oder Disjunktion verhält sich so wie im zweiten Fall: mindestens einer der Werte muss wahr sein um ein wahres Gesamtergebnis zu erhalten. Die andere Form, dass nur einer der beiden Werte wahr sein darf um ein wahres Gesamtergebnis zu erhalten lernen wir später kennen, das *exklusiv Oder* oder auch *Kontravalenz* genannt. Fassen wir einmal zusammen in der:

Definition 4

Eine *Disjunktion* ist die Aussage »*p oder q*« ($p \vee q$), die genau dann *wahr* ist, wenn wenigstens einer der beiden Aussagen p oder q *wahr* ist. ◂

Als Zeichen der Disjunktion wird das Symbol $\vee$ verwendet. Die Wahrheitstafel der Disjunktion ist in Tabelle 2 wiedergegeben.

p	q	p ∨ q
f	f	f
w	f	w
f	w	w
w	w	w

Tabelle 2: Wahrheitstafel Disjunktion

Beispiel 2:

Nehmen wir wieder die Verknüpfung aus der Konjunktion, nun nur als Disjunktion: »*x ist gerade oder durch 3 teilbar*«. Daraus ergibt sich für verschiedene Werte von x die folgende Wahrheitstafel:

Zahl x	Teilaussagen		Gesamtaussage
	x ist gerade	*x* ist durch 3 teilbar	*x* ist gerade oder durch 3 teilbar
2	w	f	w
3	f	w	w
4	w	f	w
5	f	f	f
6	w	w	w
7	f	f	f
9	f	w	w
12	w	w	w

2.3 Negation (Nicht-Verknüpfung)

Die *Negation* oder *Nicht-Verknüpfung* ist die einzige Verknüpfung, sie sich nur auf eine Aussage bezieht. D. h. bei den vorherigen Verknüpfungen Konjunktion und Disjunktion haben wir immer zwei Aussagen, die miteinander verknüpft wurden. Bei der *Negation* wird nur eine Aussage verwendet, die die Wahrheitswert der Aussage umkehrt, so dass aus einer wahren Aussage ein falscher Wahrheitswert und aus einer falschen Aussage ein wahrer Wahrheitswert als Ergebnis herauskommt.

Definition 5 [*Negation*]

Eine *Negation* ist die Aussage »*NICHT p*« ($\neg p$), die genau dann wahr ist, wenn p selber falsch ist. ◀

Als Zeichen der Negation wird häufig $\neg$ verwendet. Die Wahrheitstafel der Negation ist in Tabelle 3 wiedergegeben.

p	¬p
f	w
w	f

Tabelle 3: Wahrheitstafel Negation

2.4 Implikation (Wenn-Dann-Verknüpfung)

Dieser Verknüpfungstyp ist manchmal nicht ganz so einfach zu verstehen und auch nicht mit dem Wahrheitsgehalt von Sprachformulierungen in unserem alltäglichen Leben vereinbar. Bei diesem Verknüpfungstyp wird aus der ersten Teilaussage auf die zweite geschlossen. Dabei ist die Implikation nur dann falsch, wenn aus einer wahren Voraussetzung die Folgerung nicht erfüllt wird.

Definition 6 [*Implikation*]

Eine *Implikation* ist die Aussage »*WENN p, dann q*« ($p \Rightarrow q$), die aus der Voraussetzung p und der Folgerung q besteht und nur dann einen Wahrheitswert *falsch* hat, wenn aus einer wahren Voraussetzung die Folgerung nicht erfüllt wird (der Wahrheitswert ist *falsch*). ◀

für eine *Implikation* wird das Symbol $\Rightarrow$ verwendet. Die Wahrheitstafel der *Implikation* ist in Tabelle 4 wiedergegeben.

p	q	p ⇒ q
f	f	w
w	f	f
f	w	w
w	w	w

Tabelle 4: Wahrheitstafel Implikation

Die Implikation kann aus der Disjunktion und Negation zusammengesetzt werden:

$$(\neg p) \vee q$$

entspricht von der Wahrheitstafel

$$p \Rightarrow q$$

2.5 Äquivalenz

Unter der *Äquivalenz* versteht man die Verknüpfung die eine Abbildung darstellt, wenn beide Teilaussagen den selben Wahrheitswert besitzen, ein Wahrheitswert *wahr* zu besitzen. Formulieren kann man dies über: *p gilt genau dann, wenn q*.

Definition 7 [*Äquivalenz*]

Unter einer *Äquivalenz* versteht man die Verknüpfung *p gilt genau dann, wenn q* ($p \Leftrightarrow q$), die bei gleichen Wahrheitswerten der beiden Teilaussagen p und q einen Wahrheitswert *wahr* zurückliefert. ◀

Als Symbol für die *Äquivalenz* wird $\Leftrightarrow$ verwendet. Die Wahrheitstafel der *Äquivalenz* ist in Tabelle 5 wiedergegeben.

Die Äquivalenz kann aus der Implikation und Konjunktion zusammengesetzt werden:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

entspricht von der Wahrheitstafel

$$p \Leftrightarrow q$$

p	q	p ⇔ q
f	f	w
w	f	f
f	w	f
w	w	w

Tabelle 5: Wahrheitstafel Äquivalenz

p	q	p XOR q
f	f	f
w	f	w
f	w	w
w	w	f

Tabelle 6: Wahrheitstafel Kontravalenz

2.6 Weitere Verknüpfungen

Die nachfolgenden Verknüpfungen werden zwar in der Mathematik selten verwendet, dafür aber z. T. im Schaltungsentwurf oder in der Informatik.

2.6.1 Kontravalenz (Exklusives Oder)

Die *Kontravalenz* bezeichnet eine Verknüpfung, die nur dann wahr ist, wenn nur einer der beiden Teilaussagen wahr ist. Wir erinnern uns, bei der Disjunktion muss **mindestens** einer der beiden Teilaussagen wahr sein, um eine wahre Aussage zu erhalten. Bei der *Kontravalenz* darf nur eine der beiden Teilaussagen wahr sein, um eine wahre Aussage zu erhalten.

Definition 8 [*Kontravalenz*]

Unter der *Kontravalenz* versteht man die Verknüpfung »*entweder p oder q*« (p XOR q), die nur dann wahr ist, wenn p und q nicht den selben Wahrheitswert haben. ◂

Für die *Kontravalenz* wird häufig *XOR* verwendet (von *exclusive or*). Die Wahrheitstafel der *Kontravalenz* ist in Tabelle 6 wiedergegeben.

Die Kontravalenz ist eine negierte Äquivalenz:

$$\neg(p \Leftrightarrow q)$$

entspricht von der Wahrheitstafel

$$p \text{ XOR } q$$

2.6.2 Sheffer- und Peirce-Operator

Die Verknüpfungen einer negierten Konjunktion wird auch *Sheffer-Operator*, die einer negierten Disjunktion auch *Peirce-Operator* genannt.

Definition 9 [*Sheffer- und Peirce-Operator*]

Die logische Verknüpfung aus einer negierten Konjunktion wird auch *Sheffer-Operator* oder *NAND* bezeichnet ($p|q$). Eine negierte Disjunktion wird als *Peirce-Operator* oder *NOR* bezeichnet ($p \downarrow q$). ◂

Für den Sheffer-Operator wird durch das Symbol | gekennzeichnet, der Peirce-Operator durch das Symbol ↓. Die Wahrheitstafel des *Sheffer- und Peirce-Operators* ist in Tabelle 7 wiedergegeben.

p	q	p|q	p ↓ q
f	f	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
w	w	f	f

Tabelle 7: Wahrheitstafel Sheffer- und Peirce-Operator

2.7 Bindungsstärken

Um mit den logischen Operatoren arbeiten zu können, müssen noch ihre Bindungsstärken festgelegt werden, um die Reihenfolge der Auswertungen der Teilaussagen festlegen zu können.

Definition 10 [*Bindungsstärken*]

Die Bindungsstärke der oben eingeführten logischen Operatoren lautet in absteigender Reihenfolge:

$$\neg, |, \downarrow, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$ ◀

2.8 Tautologie

Eine logische Aussageverknüpfung, die aufgrund ihrer Struktur immer den Wahrheitswert *wahr* besitzen, unabhängig davon, welchen Wahrheitswert die einzelnen Teilaussagen enthalten, wird *Tautologie* genannt.

Definition 11 [*Tautologie und Widerspruch*]

Ein logischer Ausdruck wird *Tautologie* genannt, wenn sich für alle Kombinationen der Argumente der Wahrheitswert *wahr* ergibt. Wird immer der Wahrheitswert *falsch* erhalten, so spricht man von einem *Widerspruch*. ◀

Tautologien haben wir schon weiter oben verwendet, ohne uns diesem bewusst zu ein, und zwar bei der Feststellung, dass einige logische Operatoren durch eine andere Aussageverknüpfung gebildet werden können (siehe u. a. *Implikation*, *Äquivalenz*. . .).

Bekanntestes Beispiel für eine Tautologie ist die doppelte Verneinung.

Beispiel 3:

Die Aussage $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ ist eine Tautologie. Dies kann man über die Wahrheitstafel beweisen, indem man die einzelnen Wahrheitswerte einsetzt und die Gleichheit der Wahrheitswerte links und rechts vom Äquivalenzzeichen überprüft.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
f	w	f
w	f	w

3 Regeln bei logischen Verknüpfungen

Im folgenden wollen wir noch einige Regeln für die Arbeit mit logischen Verknüpfungen definieren. Beginnen wir mit der

Definition 12 [*Gleichheit von logischen Ausdrücken*]

Zwei logische Ausdrücke p und q sind genau dann gleich ($p = q$), wenn sie die gleichen Wahrheitstafeln besitzen. ◀

Des weiteren gelten die folgenden Gesetze für beliebige logische Ausdrücke p, q und r.

Satz 13 [*Kommutativgesetz*]

$$\begin{aligned} p \wedge q &= q \wedge p \\ p \vee q &= q \vee p \end{aligned}$$ ◀

Satz 14 [*Assoziativgesetz*]

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \wedge r &= p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r &= p \vee (q \vee r) \end{aligned}$$ ◀

Satz 15 [*Distributivgesetz*]

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &= (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$ ◀

Satz 16 [*de Morgan'sche Regeln*]

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &= \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &= \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$ ◀

Der Beweis für diese Gesetze und Regeln kann über die Wahrheitstafeln geführt werden.

Des weiteren gelten noch die Regeln:

Satz 17

Für die beliebige Aussage p gelten die folgenden Regeln:

- $\neg(\neg p) = p$
- $f \wedge p = f, w \wedge p = p$
- $f \vee p = p, w \vee p = w$
- $p \wedge \neg p = f$
- $p \vee \neg p = w$ ◀

Wie wir oben bereits gesehen haben, kann man einige logische Verknüpfungen durch andere Verknüpfungen ersetzen bzw. abbilden. Hierzu gilt der folgende

Satz 18

Jeder logische Ausdruck kann durch einen Ausdruck ersetzt werden, der nur die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält. ◀

Man kann sogar noch weiter gehen und alle logischen Verknüpfungen nur durch den Sheffer-Operator ersetzten, gleiches gilt für den Peirce-Operator.

Satz 19

Jeder logische Ausdruck kann durch einen Ausdruck ersetzt werden, der nur den Sheffer-Operator $|$ enthält. Gleiches gilt für den Peirce-Operator $\downarrow$. ◀

Die beiden vorangegangen Sätze gelten aufgrund der folgenden Tautologien:

$$\begin{aligned}
p \text{ xor } q &= (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
p \Rightarrow q &= \neg p \vee q \\
p \Leftrightarrow q &= (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\
p|q &= \neg(p \wedge q) \\
p \downarrow q &= \neg(p \vee q)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\neg p &= p|p &&= p \downarrow p \\
p \vee q &= (p|p)|(q|q) &&= (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \\
p \wedge q &= (p|q)|(p|q) &&= (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)
\end{aligned}$$